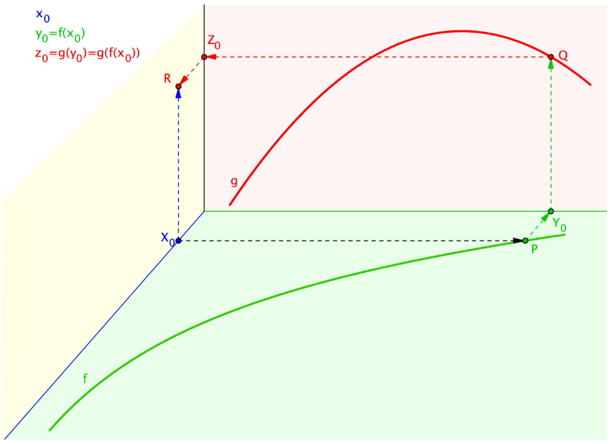
Leittext

Über das Entstehen neuer Funktionen

Bernhard Reuß



Eine Anleitung zum Selbststudium

Vorgehensweise

Mit Hilfe der nachfolgenden Informationen und Aufgaben werden Sie sehen, dass sich durch die Verknüpfung von Grundfunktionen viele neue Funktionen bilden lassen. Die Eigenschaften der neuen Funktionen lassen sich aus dem Entstehungsprozess heraus oft leichter verstehen.

Lesen Sie die Informationen und lösen Sie die Aufgaben in Partnerarbeit. Benutzen Sie zum Erstellen der Graphen ein geeignetes Plottprogramm.[1] Die Vorgehensweisen und Lösungen notieren Sie bitte als Hefteintrag. Wir werden sie in den nächsten Stunden vergleichen.

Der vorliegende Text kann auch auf meiner Seite unter `http://www.bereuss.de/Seiten/analysis.html` geladen werden.

1 Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Funktionen

Neben der Untersuchung vorgegebener Funktionen hat man die Möglichkeit, neue Funktionen aus vorhandenen zu gewinnen. Am einfachsten geht das durch die Anwendung der vier Grundrechenarten.

$$\begin{aligned} f+g\colon x &\mapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x) \\ f-g\colon x &\mapsto (f-g)(x) = f(x)-g(x) \\ f\cdot g\colon x &\mapsto (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) \\ \frac{f}{g}\colon x &\mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

Aufgabe 1: Beschreiben Sie mit eigenen Worten wie bei den neuen Funktionen die Funktionswerte aus den alten Funktionswerten gebildet werden.

Die Funktionswerte von f und g können nur dort addiert, subtrahiert und multipliziert werden, wo die *beiden* Funktionswerte auch berechnet werden können. Bei der Division ist zusätzlich darauf zu achten, dass der Nenner nicht Null wird. Mathematisch formuliert bedeutet dies

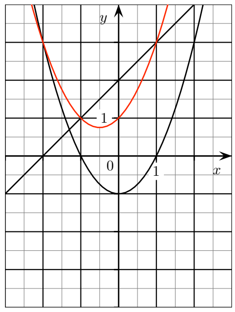
$$\begin{aligned} D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f\cdot g} &= D_f \cap D_g \\ D_{\frac{f}{g}} &= (D_f \cap D_g) \setminus \{x \mid g(x)=0\} \end{aligned}$$

Wir wollen uns diese Vorgehensweise an einem konkreten Beispiel verdeutlichen. Dazu wählen wir für f und g folgende Funktionen in der gemeinsamen Definitionsmenge $\mathbb{R}$:

$$f\colon f(x) = x+2 \qquad \text{und} \qquad g\colon g(x) = x^2-1$$

[1] GeoGebra leistet hier gute Dienste.

Aufgabe 2: Zeichnen Sie mit dem Plottprogramm die beiden Graphen G_f und G_g sowie den Graphen von G_{f+g}.(Beachten Sie den Menüpunkt $f + g$.)
Sie erhalten ein Bild wie das nebenstehende.
Experimentieren Sie etwas mit dem Plottprogramm (Farben, Linienstärke etc.)



Aufgabe 3: Bearbeiten Sie nun mit Hilfe der Zeichnung folgende Punkte:

Begründen Sie, warum G_{f+g} den Graphen von G_f in den Punkten $P_1(-1/1)$ sowie $P_2(1/3)$ schneidet.

Warum wird G_g von G_{f+g} im Punkt $P_3(-2/3)$ geschnitten?

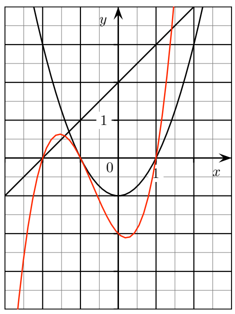
Geben Sie den Funktionsterm von $f + g$ an und ermitteln Sie den Scheitel der Parabel G_{f+g}.

Aufgabe 4: Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f - g$ und begründen Sie mit eigenen Worten, warum der neue Graph die y-Achse bei 3 schneiden muss. Bestätigen Sie dies auch durch Einsetzen von $x = 0$ in die neue Funktionsgleichung.

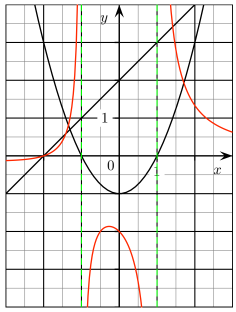
Welche Aussage können Sie bei den Nullstellen x_N von $f - g$ im Hinblick auf $f(x_N)$ und $g(x_N)$ machen? Begründen Sie die Nullstellen von $f - g$ auch geometrisch über den Abstand.

Wo ist der Abstand zwischen G_f und G_g am größten?

Aufgabe 5: Lassen Sie nun den Graphen $G_{f \cdot g}$ zeichnen. Begründen Sie dessen Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und den Verlauf für $x \to \pm\infty$.
Geben Sie die Nullstellenform an.



Der Graph von $\frac{f}{g}$ zeigt in der Nähe von ± 1 ein zunächst seltsames Verhalten.
Er strebt hier – in der Nähe der sog. *vertikalen Asymptoten* – sehr schnell gegen $\pm\infty$.



Aufgabe 6: Geben Sie Funktionsterm und die Definitionsmenge der neuen Funktion an, und begründen Sie auch damit das Verhalten links und rechts dieser Asymptoten. Geben Sie die Gleichungen der vertikalen Asymptoten an. Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion $\frac{f}{g}$. Wie sind Sie dabei vorgegangen? (Merksatz)

Aufgabe 7: Ändern Sie nun den Funktionsterm von f um in $f(x) = x + 1$. Lassen Sie den neuen Graphen von $\frac{f}{g}$ zeichnen. Können Sie das Verhalten bei $x = -1$ (keine Asymptote) erklären?

In der folgenden Aufgabe arbeiten Sie bitte mit beliebigen, selbstgewählten Funktionen.

Aufgabe 8: Lassen Sie den Graphen einer beliebigen *ungeraden* Funktion f und einer beliebigen *geraden* Funktion g zeichnen.[2] Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten der Graphen der Funktionen $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$. Welche allgemeine Aussage können Sie formulieren?

Wählen Sie nun f und g beide *gerade*. Untersuchen Sie die Symmetrie von $f \pm g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$. Welche Aussagen ergeben sich, wenn beide Funktionen *ungerade* sind.

Aufgabe 9: Gegeben ist nun die reelle Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \qquad x \in \mathbb{R}$.

Lassen Sie sich den Graphen von $f(x + a)$ für verschiedene Werte von a zeichnen. Welche Bedeutung hat demnach *a im Argument* für den Graphen G_f?

Erklären Sie den Unterschied bei $a \cdot f(x)$ sowie $f(a \cdot x)$ mit $a > 0$ mit Hilfe der obigen Funktion.

[2] Sie wissen doch noch, was eine gerade bzw. ungerade Funktion ist? Wenn nicht, lesen Sie in der Formelsammlung S. 62 nach.

Aufgabe 10: Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f\colon f(x) = \sin(x)$ für $|x| \le 5$. Lassen Sie zusätzlich zur Sinusfunktion folgende Graphen zeichnen:

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= x \\
g_2(x) &= x - \frac{x^3}{3!} \\
g_3(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \\
g_4(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}
\end{aligned}$$

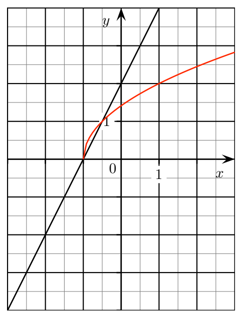
Zur Bedeutung von $k!$ (sprich: k-Fakultät) vergleichen Sie bitte mit der Formelsammlung.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Funktion f und den Funktionen g_i? Können Sie noch *bessere* Funktionen g_i angeben?

2 Verkettung von Funktionen

Eine weitere Möglichkeit aus gegebenen Funktionen neue Funktionen zu bilden, stellt das *Nacheinanderausführen* oder die *Verkettung* zweier Funktionen dar.[3]

Betrachten wir dazu die beiden Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ sowie $g(x) = 2x + 2$. Wir bilden die verkettete Funktion $f \circ g$ (sprich: f *nach* g) indem wir bei gegebenem x-Wert zuerst $g(x)$ berechnen und diesen Wert als Argument für f einsetzen.
Beispiel: $x = 1$
Zuerst in g einsetzen: $g(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$
dann in f einsetzen: $f(4) = \sqrt{4} = 2$
liefert insgesamt: $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = 2$.



Die Funktion g wird *innere Funktion*, die Funktion f *äußere Funktion* genannt. Man kann sich merken: Die Funktion, deren Wert zuerst berechnet wird, ist immer die innere Funktion.

Aufgabe 11: Die Funktion $f \circ g$ im obigen Beispiel ist offensichtlich nur für x-Werte $x \ge -1$ definiert. Begründen Sie dies. Welche Bedingung muss deshalb hinsichtlich des Definitionsbereiches erfüllt sein?

Aufgabe 12: Lassen Sie die Graphen von $f \circ g$ und $g \circ f$ zeichnen. (Die Wurzelfunktion gibt man üblicherweise mit *sqrt* ein. Also $f(x) = sqrt(x)$.) Was kann über die Vertauschbarkeit (Kommutativität) bei der Verkettung von Funktionen ausgesagt werden?

[3] Manchmal spricht man auch von der *Komposition* von Funktionen.

Aufgabe 13: Ermitteln Sie bei den Funktionen

$$\begin{aligned} h(x) &= (x^2 - 3x + 1)^2 \\ f_1(x) &= \sin(x^2) \\ f_2(x) &= (\sin(x))^2 = \sin^2(x) \\ g(x) &= \frac{1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

die innere und die äußere Funktion.

Unter $|x|$ (*absoluter Betrag von* x oder kurz x *absolut*) versteht man den (nichtnegativen) Abstand von x zum Nullpunkt der Zahlengeraden. Es gilt demnach

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Die Funktion

$$\text{abs}\colon x \mapsto |x| \qquad x \in \mathbb{R}$$

heißt *Betragsfunktion*.

Aufgabe 14: Lassen Sie den Graphen von $\text{abs}(x)$ zeichnen und machen Sie sich klar, warum der Verlauf so ist wie er ist.

Aufgabe 15: Untersuchen Sie nun die Funktion

$$g\colon x \mapsto |2x + 3| \qquad x \in \mathbb{R}$$

Wie läßt sich der Verlauf des Graphen erklären? Stellen Sie g als Verkettung von zwei Funktionen dar.

Aufgabe 16: Lassen Sie die Graphen von

$$\begin{aligned} f_1(x) &= |2x + 3| + x \qquad & x \in \mathbb{R} \\ f_2(x) &= \frac{|x|}{x + 1} \qquad & x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \end{aligned}$$

plotten und machen Sie sich den Verlauf klar.

Für welche Werte von x gilt: $f_1(x) = 4$ bzw. $f_1(x) \leq 4$? Ermitteln Sie Näherungswerte aus der Zeichnung und überprüfen Sie diese Werte rechnerisch.