Gebrochen-rationale Funktionen

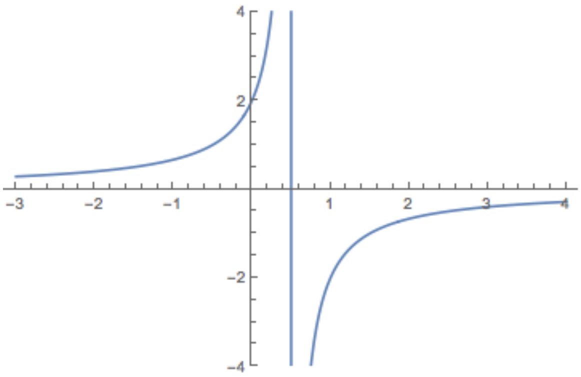
Übung 1

Gegeben ist die Funktion f_1 in ihrem maximalen Definitionsbereich D_{f_1} durch:

$$f_1\colon x \mapsto f_1(x) = \frac{2}{1-2x} \qquad x \in D_{f_1} \subset \mathbb{R}$$

1. Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereich und geben Sie die Art der Definitionslücke an.
2. Untersuchen Sie den Graphen G_{f_1} auf
   - Symmetrie
   - Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
   - Asymptoten
3. Gibt es Schnittpunkte des Graphen mit seinen Asymptoten? Begründung!
4. Skizzieren Sie den Graphen.
5. Machen Sie – ohne Differentialrechnung – Aussagen zur Monotonie und zum Krümmungsverhalten.

Lösung

1. $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, Unendlichkeitsstelle mit VZW
2. k.e.S., $S_y(0/2)$, senkrechte Asymptote: $x = \frac{1}{2}$, waagrechte A. $y = 0$
3. keine Nullstelle, also auch kein SP mit horizontaler A., mit senkrechter A. kein SP möglich
4. 

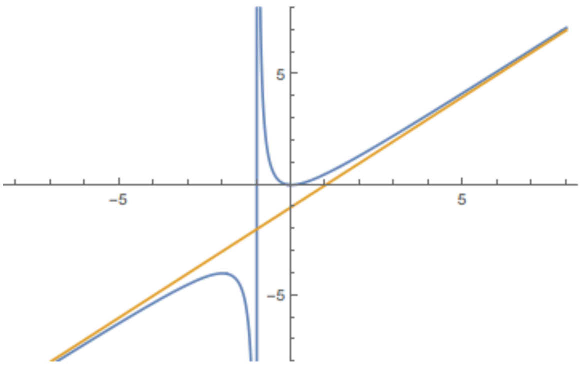
5. G_{f_1} in seinem ganzen D-Bereich streng monoton steigend; für $x < \frac{1}{2}$ linksgekrümmt, für $x > \frac{1}{2}$ rechtsgekrümmt

Gegeben ist die Funktion f_2 in ihrem maximalen Definitionsbereich D_{f_2} durch:

$$f_2 \colon x \mapsto f_2(x) = \frac{x^2}{x+1} \qquad x \in D_{f_2} \subset \mathbb{R}$$

1. Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereich und geben Sie die Art der Definitionslücke an.
2. Untersuchen Sie den Graphen G_{f_2} auf
   - Symmetrie
   - Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
   - Asymptoten
3. Gibt es Schnittpunkte des Graphen mit seinen Asymptoten? Begründung!
4. Skizzieren Sie den Graphen.
5. Geben Sie – ohne Differentialrechnung – den Tiefpunkt an.

Lösung

1. $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, Unendlichkeitsstelle mit VZW
2. k.e.S., Schnittpunkt im Ursprung (doppelte Nst), senkrechte Asymptote: $x = -1$, schiefe A. $y = x - 1$
3. keine Schnittpunkte
4. 

5. $TiP(0/0)$

Gebrochen-rationale Funktionen

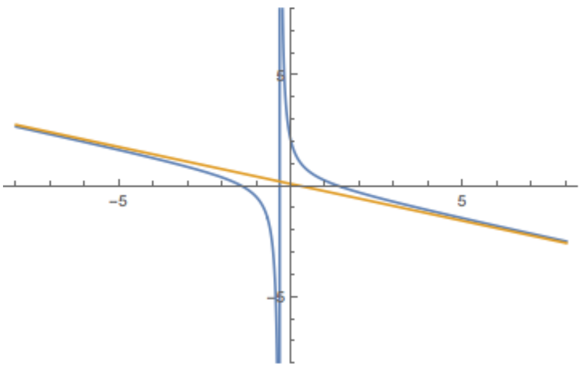
Übung 3

Gegeben ist die Funktion g in ihrem maximalen Definitionsbereich D_g durch:

$$g\colon x \mapsto g(x) = \frac{2 - x^2}{3x + 1} \qquad x \in D_g \subset \mathbb{R}$$

1. Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereich.
2. Ermitteln Sie
   - das Verhalten von $g(x)$ bei Annäherung an die Definitionslücke.
   - die Nullstellen von g
   - die Asymptoten von G_g
3. Skizzieren Sie den Graphen.
4. Welche Steigung hat der G_g für $x \to \pm\infty$?

Lösung

1. $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$
2. $g(x) \to \infty$ für $x \overset{>}{\to} -\frac{1}{3}$, $\quad g(x) \to -\infty$ für $x \overset{<}{\to} -\frac{1}{3}$
   $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$
   senkrechte Asymptote: $x = -\frac{1}{3}$, schiefe A. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$
3. 

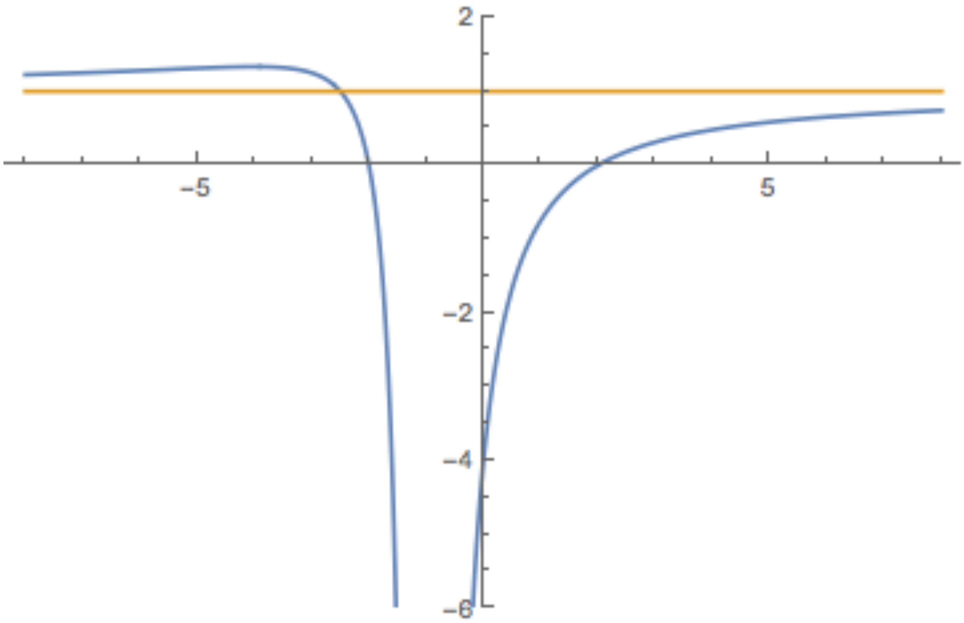
4. Da sich G_g seiner schiefen Asymptote annähert, haben beide dieselbe Steigung. Also: $g'(x) = -\frac{1}{3}$ für $x \to \pm\infty$.

Gegeben ist die Funktion h in ihrem maximalen Definitionsbereich D_h durch:

$$h\colon x \mapsto h(x) = \frac{x^2 - 4}{(x+1)^2} \qquad x \in D_h \subset \mathbb{R}$$

Ermitteln Sie die wichtigsten Eigenschaften der Funktion h und skizzieren Sie den Graphen.

Lösung

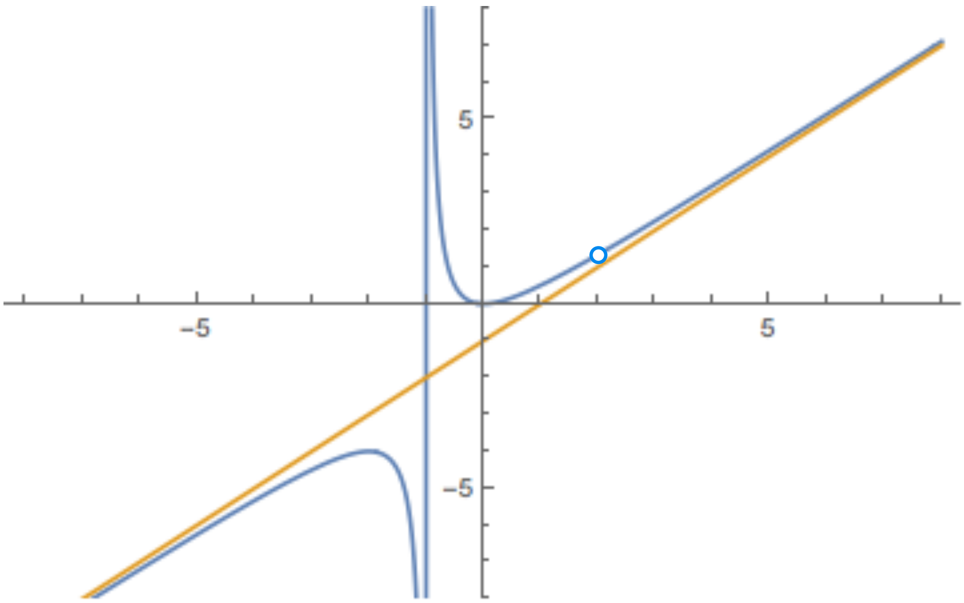


Gegeben ist die Funktion f in ihrem maximalen Definitionsbereich D_f durch:

$$f\colon x \mapsto f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - x - 2} \qquad x \in D_f \subset \mathbb{R}$$

Untersuchen Sie die Art der Definitionslücken und zeigen Sie, dass f_2 aus Übung 2 die stetige Fortsetzung von f ist.

Lösung



Gegeben ist die Funktion g_a in ihrem maximalen Definitionsbereich $D(g_a)$ durch:

$$g_a\colon x \mapsto g_a(x) = \frac{x^2 - a}{x + 1} \qquad x \in D_f \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$$

Ermitteln Sie in Abhängigkeit des Parameters a die Art der Definitionslücke.
Zeichnen Sie für einige Sonderfälle (insb. $a = 1$) den jeweiligen Graphen.

Lösung

Benutzen Sie GeoGebra am Lehrerrechner!