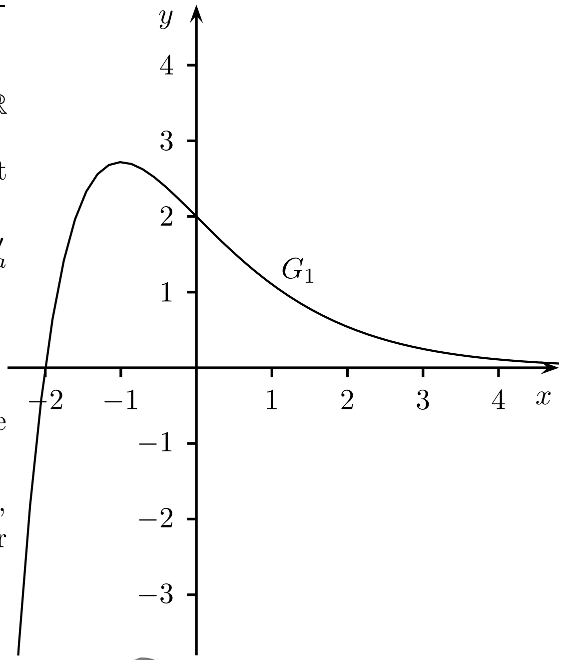
Aufgaben zum uneigentlichen Integral

1.0 Gegeben sind für $a \in \mathbb{R}^*$ die reellwertigen Funktionen f_a durch

$$f_a\colon x \mapsto (ax+2)\cdot e^{-x} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Der Graph einer Funktion f_a wird mit G_a bezeichnet.



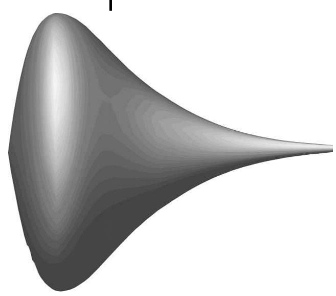
1.1 Bilden Sie die Ableitungsfunktion f_a' und zeigen Sie, dass gilt:

$$f_a(x) = a\cdot e^{-x} - f_a'(x)$$

1.2 Ermitteln Sie mit dieser Beziehung alle Stammfunktionen der Funktion f_1.

1.3 Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, den der Graph G_1 mit der x-Achse für $x \geq -2$ einschließt.

Lässt man den Graphen G_1 um die x-Achse rotieren, erhält man für $x \geq -2$ den nebenstehenden Rotationskörper. (Hier etwas verkleinert dargestellt.) Das Volumen des so entstandenen Rotationskörpers erhält man durch



$$V = \pi \int_{-2}^{\infty} [f_1(x)]^2 \,\mathrm{d}x$$

(Nachweis nicht erforderlich; vgl. aber FS S. 68 H.2.)

2.0 Gegeben ist nun die reelle Funktion g durch

$$g\colon g(x) = \frac{1}{x} \qquad x \in [1;\infty[_{\mathbb{R}}$$

2.1 Untersuchen Sie damit

$$A = \int_1^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \qquad\qquad V = \pi\int_1^{\infty} [g(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

Interpretieren Sie das Ergebnis jeweils geometrisch. Überrascht?